EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

durée : 2h30

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986 .

OBJET DU PROBLEME

Le problème consiste en l'étude d'une méthode de calcul approché d'une intégrale $\int_a^b f(t)dt$; cette méthode, qui apparaît être d'ordre 4, est un cas particulier de méthodes liées aux polynômes de LEGENDRE.

NOTATIONS

On note $\mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

Pour un intervalle fermé borné $[a,b]$ $(a<b)$ on désigne par $C^4([a,b])$ l'espace vectoriel constitué des fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^4 ; si $f \in C^4([a,b])$ on note

$$M_4(f) = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)| \quad , \quad I(f) = \int_a^b f(t)dt$$

PARTIE I : Etude d'une formule interpolatoire pour une intégrale

1) a) Soient t_o et t_1 deux éléments fixés de $[-1,1]$ tels que $t_o < t_1$. Montrer qu'il existe un couple (λ,μ) de nombres réels et un seul tel que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 1 ,

$$(1) \qquad \int_{-1}^{1} P(t)dt = \lambda P(t_o) + \mu P(t_1)$$

b) Montrer que (1) reste valable pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ si et seulement si $t_1 = -t_o = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\lambda = \mu = 1$.

Dans les questions 2, 3 et 4 , f désigne un élément de $C^4([-1,1])$; pour un tel f on pose $A(f) = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$; on se propose de majorer $|I(f) - A(f)|$, afin de contrôler l'erreur commise en remplaçant l'intégrale $I(f)$ par la valeur approchée $A(f)$.

2) a) Montrer que l'application

$$P \to (P(-1/\sqrt{3}), P(1/\sqrt{3}), P'(-1/\sqrt{3}), P'(1/\sqrt{3}))$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ sur $\mathbb{R}^4$.

b) En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$P_f(-1/\sqrt{3}) = f(-1/\sqrt{3}) \qquad P_f(1/\sqrt{3}) = f(1/\sqrt{3})$$
$$P_f'(-1/\sqrt{3}) = f'(-1/\sqrt{3}) \qquad P_f'(1/\sqrt{3}) = f'(1/\sqrt{3})$$

c) Montrer que

$$|I(f) - A(f)| \le \int_{-1}^{1} |f(t) - P_f(t)|dt$$

3) On désigne par Q le polynôme $Q(X) = (X^2 - 1/3)^2$.

a) On fixe $t \in [-1,1] - \{-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}$ auquel on associe la fonction $H : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(u) = P_f(u) - f(u) + \frac{f(t)-P_f(t)}{Q(t)}\, Q(u) \qquad u \in [-1,1]$$

Vérifier que $H(t) = H(-1/\sqrt{3}) = H(1/\sqrt{3}) = H'(-1/\sqrt{3}) = H'(1/\sqrt{3}) = 0$.
En déduire l'existence d'un $c \in [-1,1]$ tel que

$$H^{(4)}(c) = 0$$

b) Montrer, pour tout $t \in [-1,1]$, l'existence d'un $c \in [-1,1]$,

Tournez la page S. V. P.

tel que :

$$f(t) - P_2(t) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}\, Q(t) .$$

c) En déduire l'inégalité

$$\left|I(f) - A(f)\right| \leq \frac{M_4(f)}{4!} \int_{-1}^{1} Q(t)dt .$$

4) a) Déduire des questions 2) et 3) la majoration

$$\left|I(f) - A(f)\right| \leq \frac{M_4(f)}{135} .$$

b) Montrer que cette majoration est la meilleure possible en exhibant une fonction f de classe C^4 sur $[-1,1]$ réalisant l'égalité.

5) On désigne dans cette question par $[\alpha,\beta]$ un intervalle fermé borné $(\alpha < \beta)$; on désire transférer la majoration établie en I.4 de l'intervalle $[-1,1]$ à l'intervalle $[\alpha,\beta]$. Pour $f \in C^4([\alpha,\beta])$ on note

$$A(f) = \frac{\beta-\alpha}{2}\left[f(m-d) + f(m+d)\right]$$

où $m = \frac{\alpha+\beta}{2}$ désigne le milieu de l'intervalle $[\alpha,\beta]$ et $d = \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}$.

Quelle majoration de $\left|I(f) - A(f)\right|$ peut-on déduire de celle établie en I.4 ?

PARTIE II : Application au calcul de valeurs approchées d'une intégrale

1) Dans cette question, $[a,b]$ désigne un intervalle fermé borné $(a < b)$. Pour $f \in C^4([a,b])$ on se propose d'approcher l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(t)dt$. A cet effet, pour tout entier $n \geq 1$, on introduit la subdivision de $[a,b]$

à pas constant $h = \frac{b-a}{n}$; on note $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les milieux des intervalles ainsi obtenus, et on approche chaque intégrale $\int_{m_j-h/2}^{m_j+h/2} f(t)dt$ par le procédé indiqué au I.5. On note $A_n(f)$ la valeur approchée ainsi obtenue pour $\int_a^b f(t)dt$.

a) Expliciter $A_n(f)$ en fonction de $f, m_1, \ldots, m_n$ et h ; écrire un algorithme permettant de calculer ce nombre.

b) Montrer la majoration suivante :

$$\left|I(f) - A_n(f)\right| \leq R_n(f)$$

avec $R_n(f) = \frac{M_4(f)\,(b-a)^5}{4320\, n^4}$.

c) Que peut-on en déduire quand $n \to \infty$?

2) On pose $I = \int_0^1 f(t)dt$ avec $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

a) Quelle est la valeur exacte de I ? En déduire une valeur décimale approchée de I à la précision 10^{-8} .

b) Calculer la dérivée $p^{\text{ième}}$ de f . En déduire que $M_4(f) = 4!$ Calculer enfin $R_2(f)$ et $R_{10}(f)$.

c) Calculer $A_n(f)$ et analyser la précision obtenue lorsque $n = 2$, puis lorsque $n = 10$.

E.N.S.I. de PHYSIQUE
commune—Mathématiques appliquées
page 125
1987